ETUDE DES CHAINES FERMEES

(2ème partie)

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

****

****

2.4 Analyse statique des mécanismes à chaînes fermées

2.4.1 OBJECTIFS

- Déterminer le degré d'hyperstaticité du mécanisme.
- Préciser les inconnues hyperstatiques.
- Modifier, si nécessaire, le mécanisme afin de le rendre isostatique.

2.4.2 PRINCIPE FONDAMENTAL

Chaque liaison normalisée est considérée comme parfaite.

Les éléments de réduction, dans le repère local R $(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, du torseur d'inter-efforts associé à la liaison L_{ij} sont :

$$\{S_j \rightarrow S_i\}_A = \begin{Bmatrix} X_{ji} & L_{ji} \\ Y_{ji} & M_{ji} \\ Z_{ji} & N_{ji} \end{Bmatrix}_R$$

avec

$$\begin{cases} \vec{R}(S_j \rightarrow S_i) = X_{ji}\vec{x} + Y_{ji}\vec{y} + Z_{ji}\vec{z} \\ \vec{M}(A, S_j \rightarrow S_i) = L_{ji}\vec{x} + M_{ji}\vec{y} + N_{ji}\vec{z} \end{cases}$$

On applique **le Principe Fondamental de la Statique** à chacun des n solides de la chaîne simple.

Si $\{\bar{S}_i \rightarrow S_i\}_A$ désigne le torseur de toutes les actions extérieures agissant sur le solide S_i, on peut écrire:

$$\forall i \in [1,n] \quad \boxed{\{\bar{S}_i \rightarrow S_i\}_A = 0 \qquad (1)}$$

soit

$$\forall i \in [1,n] \quad \boxed{\begin{array}{ll} \sum_{j\neq i} \vec{R}(S_j \rightarrow S_i) = \vec{0} & (2) \\ \sum_{j\neq i} \vec{M}(A, S_j \rightarrow S_i) = \vec{0} & (3) \end{array}}$$

2.4.3 METHODE DE RESOLUTION

2.4.3.1 Projection de (2) et (3) sur R $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

On obtient un système (E) de 6n équations scalaires à N_s paramètres statiques inconnus avec :

$$N_s = \sum_{i=1}^{n+\gamma} n_{si} = \sum_{i=1}^{n+\gamma} (6 - n_{ci})$$

soit

$$\boxed{N_s = 6(n+\gamma) - \sum_{i=1}^{n+\gamma} n_{ci} = 6(n+\gamma) - N_c}$$

2.4.3.2 Rang statique

Le rang statique r_s est le nombre d'équations indépendantes du système (E). On a bien sûr $r_s \leq 6n$.

On peut démontrer que $m = 6n - r_s$ et donc que : $\boxed{r_s = 6n - m}$

Le système (E) s'écrit alors : $\boxed{(A)(X) = (B)}$

où

(X) désigne un vecteur unicolonne contenant r_s inconnues d'inter-efforts.

(B) désigne un vecteur unicolonne contenant $N_s - r_s$ paramètres statiques à fixer et les paramètres donnés.

(A) désigne une matrice (r_s, r_s) de coefficients géométriques du mécanisme.

2.4.4 DEGRE D'HYPERSTATICITE D'UN MECANISME

2.4.4.1 Définition

On appelle degré d'hyperstaticité d'un mécanisme, noté h, le nombre de paramètres d'inter-efforts à fixer pour déterminer les r_s inconnues d'inter-efforts restantes.

$$\boxed{h = N_s - r_s}$$

2.4.4.2 Détermination rapide de h

Une détermination globale de h est nécessaire si on veut connaître rapidement la nature isostatique d'un mécanisme.

On a donc $\quad h = 6(n+\gamma) - N_c - r_s$

soit $h = 6(n+\gamma) - N_c - (6n - m)$

d'où $\boxed{h = m + 6\gamma - N_c}$

2.4.4.3 Signification de h

$h = 0$	$N_s = r_s$	**Le mécanisme est isostatique** Toutes les inconnues d'inter-efforts sont déterminables. Le fonctionnement correct de ce mécanisme ne nécessite aucune condition géométrique particulière.
$h > 0$	$N_s = r_s + h$	**Le mécanisme est hyperstatique d'ordre h.** Il faut fixer h inconnues d'inter-efforts afin de déterminer les r_s inconnues restantes. Le fonctionnement correct de ce mécanisme nécessite h conditions géométriques à respecter.

2.4.5 COMMENT TRAITER L'HYPERSTATISME ?

2.4.5.1 Modification du mécanisme réel en conservant le modèle d'analyse

- **On annule h inconnues d'inter-efforts** n'appartenant ni aux liaisons d'entrée ni aux liaisons de sortie. Il reste à résoudre un système de r_s équations à r_s inconnues d'inter-efforts.

- **On accroît la mobilité interne** du mécanisme en augmentant le nombre de solides du mécanisme réel.

2.4.5.2 Conservation du mécanisme réel en modifiant le modèle d'analyse

- **On rajoute h équations de comportement** en modélisant les solides comme déformables élastiquement et les liaisons rigides et sans jeu.

- **On rajoute h équations de compatibilité géométrique** en modélisant les solides comme indéformables et en tenant compte du jeu réel dans les liaisons.

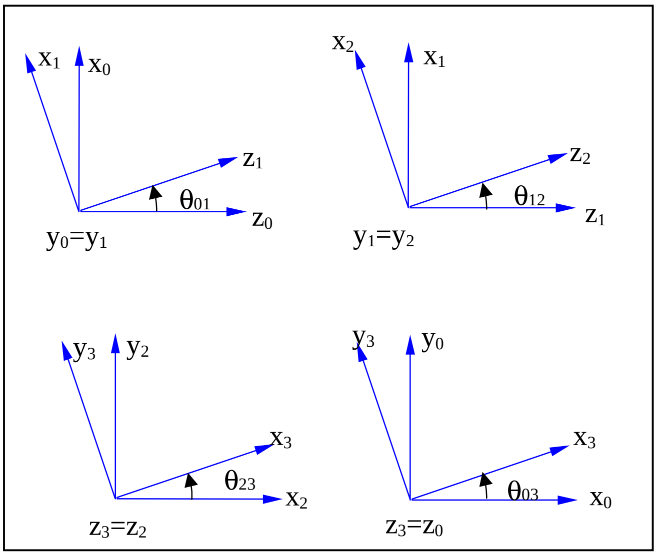
2.4.6 EXEMPLE TRAITE : MALAXEUR-MELANGEUR

2.4.6.1 Liaisons entre solides

L_{10} : Pivot d'axe $(A, \vec{y}_0)$ (entrée)
L_{32} : Pivot d'axe $(C, \vec{z}_0)$
L_{30} : Pivot glissant d'axe $(D, \vec{z}_0)$ (sortie)
L_{21} : Pivot glissant d'axe $(B, \vec{y}_0)$

2.4.6.2 Paramétrage

$\overrightarrow{AB} = R\vec{z}_1$	$\overrightarrow{CB} = -\lambda\vec{y}_1$
$\overrightarrow{DA} = -d\vec{y}_0$	$\overrightarrow{CD} = l\vec{y}_3 - h\vec{z}_0$



2.4.6.3 Torseurs statiques associés aux liaisons

$$\{T(S_0 \to S_1)\}_A = \begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & 0 \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_{R_0} \quad \{T(S_2 \to S_1)\}_B = \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ 0 & 0 \\ Z_{21} & N_{21} \end{Bmatrix}_{R_0}$$

$$\{T(S_3 \to S_2)\}_C = \begin{Bmatrix} X_{32} & L_{32} \\ Y_{32} & M_{32} \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{R_0} \quad \{T(S_0 \to S_3)\}_D = \begin{Bmatrix} X_{03} & L_{03} \\ Y_{03} & M_{03} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_0}$$

$$\{T(ext \to S_1)\}_B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{ext} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_0} \quad \{T(ext \to S_3)\}_D = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{ext} & N_{ext} \end{Bmatrix}_{R_0}$$

2.4.6.4 Application du P.F.S

L'isolement de S_1 permet d'écrire :

$$\{\mathcal{T}\ (S_0 \to S_1)\}_B + \{\mathcal{T}\ (S_2 \to S_1)\}_B + \{\mathcal{T}\ (ext \to S_1)\}_B = 0$$

soit

$$\begin{cases} \vec{R}(S_0 \to S_1) + \vec{R}(S_2 \to S_1) + \vec{R}(ext \to S_1) = \vec{0} \\ \vec{M}(B, S_0 \to S_1) + \vec{M}(B, S_2 \to S_1) + \vec{M}(B, ext \to S_1) = \vec{0} \end{cases}$$

avec

$$\vec{M}(B, S_0 \to S_1) = \vec{M}(A, S_0 \to S_1) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}(S_0 \to S_1)$$

d'où

$$\vec{M}(B, S_0 \to S_1) = \begin{vmatrix} L_{01} \\ 0 \\ N_{01} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -R\sin\theta_{01} \\ 0 \\ -R\cos\theta_{01} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} X_{01} \\ Y_{01} \\ Z_{01} \end{vmatrix}$$

soit

$$\vec{M}(B, S_0 \to S_1) = \begin{bmatrix} L_{01} + RY_{01}\cos\theta_{01} \\ RZ_{01}\sin\theta_{01} - RX_{01}\cos\theta_{01} \\ N_{01} - RY_{01}\sin\theta_{01} \end{bmatrix}_{B_0}$$

Finalement, on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{array} \quad \boxed{\begin{cases} X_{01} & + & X_{21} & & & = 0 \\ Y_{01} & & & & & = 0 \\ Z_{01} & + & Z_{21} & & & = 0 \\ L_{01} & + & L_{21} & + & RY_{01}\cos\theta_{01} & = 0 \\ RZ_{01}\sin\theta_{01} & - & RX_{01}\cos\theta_{01} & + & M_{ext} & = 0 \\ N_{01} & + & N_{21} & & & = 0 \end{cases}}$$

L'isolement de S_2 permet d'écrire :

$$-\{\mathcal{T}\ (S_2 \to S_1)\}_C + \{\mathcal{T}\ (S_3 \to S_2)\}_C = 0$$

soit

$$\begin{cases} -\vec{R}(S_2 \to S_1) + \vec{R}(S_3 \to S_2) = \vec{0} \\ -\vec{M}(C, S_2 \to S_1) + \vec{M}(C, S_3 \to S_2) = \vec{0} \end{cases}$$

Calcul de $\vec{M}(C, S_2 \to S_1) = \vec{M}(B, S_2 \to S_1) + \overrightarrow{CB} \wedge \vec{R}(S_2 \to S_1)$

$$\vec{M}(C,S_2 \to S_1) = \begin{vmatrix} L_{21} \\ 0 \\ N_{21} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -\lambda \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} X_{21} \\ 0 \\ Z_{21} \end{vmatrix}$$

soit

$$\vec{M}(C,S_2 \to S_1) = \begin{bmatrix} L_{21} - \lambda Z_{21} \\ 0 \\ N_{21} + \lambda X_{21} \end{bmatrix}_{R_0}$$

Finalement, on obtient le système d'équations suivant :

$$\boxed{\begin{cases} -X_{21} + X_{32} = 0 & (7) \\ Y_{32} = 0 & (8) \\ -Z_{21} + Z_{32} = 0 & (9) \\ -L_{21} + L_{32} + \lambda Z_{21} = 0 & (10) \\ M_{32} = 0 & (11) \\ -N_{21} - \lambda X_{21} = 0 & (12) \end{cases}}$$

L'isolement de S_3 permet d'écrire :

$$\{T(S_0 \to S_3)\}_C - \{T(S_3 \to S_2)\}_C + \{T(\text{ext} \to S_3)\}_C = 0$$

soit

$$\begin{cases} \vec{R}(S_0 \to S_3) - \vec{R}(S_3 \to S_2) + \vec{R}(\text{ext} \to S_3) = \vec{0} \\ \vec{M}(C,S_0 \to S_3) - \vec{M}(C,S_3 \to S_2) + \vec{M}(C,\text{ext} \to S_3) = \vec{0} \end{cases}$$

Calcul de $\vec{M}(C,S_0 \to S_3) = \vec{M}(D,S_0 \to S_3) + \overrightarrow{CD} \wedge \vec{R}(S_0 \to S_3)$

$$\vec{M}(C,S_0 \to S_3) = \begin{vmatrix} L_{03} \\ 0 \\ N_{03} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -l\sin\theta_{03} \\ l\cos\theta_{03} \\ -h \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} X_{03} \\ Y_{03} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}(C,S_0 \to S_3) = \begin{bmatrix} L_{03} + hY_{03} \\ -hX_{03} \\ N_{03} - lY_{03}\sin\theta_{03} - lX_{03}\cos\theta_{03} \end{bmatrix}_{B_0}$$

Finalement, on obtient le système d'équations suivant :

$$
\begin{array}{ll}
(13) & \\
(14) & \\
(15) & \\
(16) & \\
(17) & \\
(18) &
\end{array}
\quad
\boxed{\left\{\begin{array}{lclccl}
-X_{32} & + & X_{03} & & & =0 \\
-Y_{32} & + & Y_{03} & & & =0 \\
-Z_{32} & + & & & Z_{ext} & =0 \\
-L_{32} & + & L_{03} & +hY_{03} & +lZ_{ext}\cos\theta_{03} & =0 \\
-M_{32} & + & & -hX_{03} & +lZ_{ext}\sin\theta_{03} & =0 \\
-lY_{ext}\sin\theta_{03} & - & lX_{ext}\cos\theta_{03} & +N_{03} & +N_{ext} & =0
\end{array}\right.}
$$

Le bilan est le suivant :

Inconnues d'inter-efforts	$N_s = \sum_{i=1}^{n+\gamma} n_{si} = 18$
Mobilité du mécanisme	$m = N_c - r_c = 1$
Rang statique	$r_s = 6n - m = 17$
Degré d'hyperstaticité	$h = N_s - r_s = 1$

Le système d'équations est le suivant:

$$
\begin{array}{llllllll}
(1) & X_{01} & + & X_{21} & & & & =0 \\
(2) & Y_{01} & & & & & & =0 \\
(3) & Z_{01} & + & Z_{21} & & & & =0 \\
(4) & L_{01} & + & L_{21} & + & RY_{01}\cos\theta_{01} & & =0 \\
(5) & RZ_{01}\sin\theta_{01} & & & - & RX_{01}\cos\theta_{01} & & =-M_{ext} \\
(6) & N_{01} & + & N_{21} & - & & & =0 \\
(7) & & - & X_{21} & + & X_{32} & & =0 \\
(8) & & & & & Y_{32} & & =0 \\
(9) & & - & Z_{21} & + & Z_{32} & & =0 \\
(10) & & - & L_{21} & +\lambda Z_{21} + & L_{32} & & =0 \\
(11) & & & & & M_{32} & & =0 \\
(12) & & - & N_{21} & -\lambda X_{21} & & & =0 \\
(13) & - & X_{32} & + & X_{03} & & & =0 \\
(14) & - & Y_{32} & + & Y_{03} & & & =0 \\
(15) & - & Z_{32} & & & & & =-Z_{ext} \\
(16) & - & L_{32} & + & L_{03} & +hY_{03} & & =-lZ_{ext}\cos\theta_{03} \\
(17) & - & M_{32} & - & & hX_{03} & & =-lZ_{ext}\sin\theta_{03} \\
(18) & & -lY_{ext}\sin\theta_{03} & - & lX_{ext}\cos\theta_{03} & +N_{03} & & =-N_{ext}
\end{array}
$$

Après résolution on obtient :

$$
\begin{array}{lllllllll}
Y_{01} & = & Y_{32} & = & Y_{03} & & & = & 0 \\
 & & M_{32} & & & & & = & 0 \\
Z_{01} & = & Z_{32} & & & = & Z_{21} & = & -Z_{ext} \\
X_{01} & = & -X_{32} & = & X_{03} & = & -X_{21} & = & -\dfrac{N_{ext}}{l\cos\theta_{03}} \\
 & & & & & & N_{21} & = & -\dfrac{\lambda N_{ext}}{l\cos\theta_{03}} \\
 & & & & M_{03} & & & = & -lZ_{ext}\sin\theta_{03}
\end{array}
$$

Il reste un système de 3 équations indépendantes (4), (10) et (16) avec les 4 inconnues suivantes : $L_{01}, L_{21}, L_{32}, L_{03}$.

soit

$$
\begin{cases}
L_{01} + L_{21} = 0 \\
-L_{21} + L_{32} = -\lambda Z_{ext} \\
-L_{32} + L_{03} = -lZ_{ext}\cos\theta_{03}
\end{cases}
$$

Le mécanisme est donc hyperstatique d'ordre h=1.

2.4.6.5 Comment rendre ce mécanisme isostatique ?

On peut annuler 1 inconnue d'inter-effort (L_{01} ou L_{21} ou L_{32} ou L_{03}) afin de déterminer les 3 inconnues restantes en modifiant les liaisons du mécanisme.

Par exemple, posons $L_{32}=0$

Il vient: $L_{01} = -L_{21} = -\lambda Z_{ext}$

$L_{03} = -Z_{ext}(\lambda + l\cos\theta_{03})$

soit

$$
\{T(S_3 \to S_2)\}_C = \begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & M_{32} \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{R_0} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} Y_{32} = 0 \\ M_{32} = 0 \end{array}
$$

<u>Modification n°1</u>

$$
\{T(S_3 \to S_2)\}_C = \begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & M_{32} \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{R_0}
$$

<u>Liaison sphérique à doigt</u> $(C, \vec{x}, \vec{z})$

L_{10} : Pivot d'axe $(A, \vec{y}_0)$
L_{32} : Liaison sphérique à doigt $(C, \vec{x}, \vec{z})$
L_{30} : Pivot glissant d'axe $(D, \vec{z}_0)$

L_{21} : Pivot glissant d'axe $(B, \vec{y}_0)$

Calcul du degré d'hyperstaticité

Inconnues cinématiques $N_c = \sum_{i=1}^{n+1} n_{ci} = 7$

Mobilité du mécanisme $m_u=1$ $m_i=0$ $m=1$

Degré d'hyperstaticité $h=m+6-N_c=0$

Modification n°2

$$\{T(S_3 \rightarrow S_2)\}_C = \begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{R_0}$$

Liaison rotule de centre C

L_{10} : Pivot d'axe $(A, \vec{y}_0)$
L_{32} : Linéaire rotule de centre C
L_{30} : Pivot glissant d'axe $(D, \vec{z}_0)$
L_{21} : Pivot glissant d'axe $(B, \vec{y}_0)$

Calcul du degré d'hyperstaticité

Inconnues cinématiques $N_c = \sum_{i=1}^{n+1} n_{ci} = 8$

Mobilité du mécanisme $m_u=1$ $m_i=1$ $m=2$

Degré d'hyperstaticité $h=m+6-N_c=0$

Comment s'affranchir de l'hyperstatisme ?

On modélise le solide 2 comme déformable élastiquement (les liaisons étant toujours supposées sans jeu) c'est-à-dire:

$$\boxed{L_{32} = k\alpha_{32}}$$

avec **k:** **coefficient de rigidité($m.N.rd^{-1}$)**

α_{32} **angle de rotation autour de x_0 de $L_{3/2}$ (rd)**

On suppose les liaisons avec jeu (les solides ne sont plus parfaits mais présentent des défauts géométriques) c'est-à-dire :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{3} \alpha_i \leq \sum_{i=0}^{3} \alpha_{i/i+1}}$$

avec α_i défaut angulaire du solide S_i autour de x_0

$\alpha_{i/i+1}$ débattement angulaire de la liaison $L_{i/i+1}$ autour de x_0

2.5 Synthèse: Ce qu'il faut absolument savoir

Point de vue	Cinématique	Statique
Inconnues	$N_c = \sum_{i=1}^{n+\gamma} n_{ci}$	$N_s = \sum_{i=1}^{n+\gamma} n_{si} = 6(n+1) - N_c$
Equations	$E_c = 6\gamma$	$E_s = 6n$
Equations indépendantes ou rang du système.	$r_c \leq 6\gamma$	$r_s \leq 6n$
Mobilité / Hyperstaticité	$m = N_c - r_c$	$h = N_s - r_s$
Dégradation du système d'équations	$h = 6 - r_c$	$m = 6n - r_s$
Calcul de h par la formule de mobilité	$h = m + 6\gamma - N_c$ $h = m - 6n + N_s$	